

EXERCICIO 5 (Jun/25)

Sean $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x+2y-z, 3x-y+4z)$

y $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\begin{cases} g(1,1) = (2,1) \\ g(0,3) = (-3,2) \end{cases}$

- Determinar expresiones matriciales de f y g respecto de las bases canónicas
- Clasificar ambas aplicaciones lineales y en base a dicha clasificación determinar el núcleo y la imagen de cada una de las aplicaciones solo cuando sea posible hacerlo sin realizar cálculos.
- Obtener ecuaciones implícitas y la base del núcleo y la imagen de la aplicación $g \circ f$.

a) $\boxed{J}$ $J(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \{ (1, 1), (0, 3) \}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2 \\ & & B_c \\ M(B, B_c)^{-1} \uparrow & \nearrow C & \\ & B_c & \end{array}$$

$$\underline{C = A \cdot M(B, B_c)^{-1}}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

b) $J: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

J es sobreyectiva (epimorfismo)

$$\text{Im}(J) = \mathbb{R}^2$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = 2 \quad g \text{ es biyectiva (isomorfismo)}$$

$$\text{Ker}(g) = \{ (0,0) \} \quad \text{Im}(g) = \mathbb{R}^2$$

$$\hookrightarrow (g \circ d)(x, y, z) = g(d(x, y, z)) = g \left(\underbrace{x+2y-z}_x, \underbrace{3x-y+4z}_y \right) =$$

$$\Pi \quad g(x, y) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-y, \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \end{pmatrix} \quad \parallel$$

$$= \left(3x+6y-3z - 3x+y-4z, \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + 2x - \frac{2}{3}y + \frac{8}{3}z \right) =$$

$$= \left(7y-7z, \frac{7}{3}x + \frac{7}{3}z \right)$$

$$(g \circ d)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -7 \\ \frac{7}{3} & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -7 \\ \frac{7}{3} & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix} = 2$$

$$\underline{\text{Ker}(g \circ d)}$$

$$\begin{cases} 7y - 7z = 0 \\ \frac{7}{3}x + \frac{7}{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \neq \text{Ec. implícitas}$$

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad B_{\text{Ker}(g \circ d)} = \{(-1, 1, 1)\}$$

$$\text{Im}(g \circ d) = \left\langle \left(0, \frac{7}{3}\right), (7, 0), \left(-7, \frac{7}{3}\right) \right\rangle$$

$$B_{\text{Im}(g \circ d)} = \left\{ \left(0, \frac{7}{3}\right), (7, 0) \right\}$$

No tiene implícitas