EJERCICIO 4 (Jun/25)

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

a) Obtén una base ortonormal del subespacio generado por las columnas de A

b) Calcula la solución por mínimos cuadrados del sistema $Ax = b$ y su error

c) Calcule factorización QR de A

a) $\underline{v}_1 = (1,1,1,1) \quad \underline{v}_2 = (1,0,1,0) \quad \underline{v}_3 = (3,1,1,-1)$

$$\underline{u}_1 = \underline{v}_1 = \underline{(1,1,1,1)}$$

$$\underline{u}_2 = \underline{v}_2 - \frac{\underline{v}_2\,\underline{u}_1}{\underline{u}_1\,\underline{u}_1}\underline{u}_1 = (1,0,1,0) - \frac{(1,0,1,0)(1,1,1,1)}{(1,1,1,1)(1,1,1,1)}(1,1,1,1) =$$

$$= (1,0,1,0) - \frac{1}{2}(1,1,1,1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \approx \underline{(1,-1,1,-1)}$$

$$\underline{u}_3 = \underline{v}_3 - \frac{\underline{v}_3\,\underline{u}_1}{\underline{u}_1\,\underline{u}_1}\underline{u}_1 - \frac{\underline{v}_3\,\underline{u}_2}{\underline{u}_2\,\underline{u}_2}\underline{u}_2 = (3,1,1,-1) - \frac{(3,1,1,-1)(1,1,1,1)}{(1,1,1,1)(1,1,1,1)}(1,1,1,1)$$

$$- \frac{(3,1,1,-1)(1,-1,1,-1)}{(1,-1,1,-1)(1,-1,1,-1)}(1,-1,1,-1) = (3,1,1,-1) - (1,1,1,1) - (1,-1,1,-1) =$$

$$= \underline{(1,1,-1,-1)}$$

$$|\underline{u}_1| = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \underline{w}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$|\underline{u}_2| = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \underline{w}_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$|\underline{u}_3| = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \underline{w}_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

Una base ortonormal del subespacio generado por las columnas de A es $\{ \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3 \}$

b) Como $rg A = 3$, $A \underline{x} = b$ tiene una única solución por mínimos cuadrados

$$A^t \cdot A \cdot \underline{x} = A^t b \Rightarrow \underline{s} = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Error es $\| A \cdot \underline{s} - \underline{b} \| = \| (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \underline{\underline{1}}$

c) Factorización Q·R de A

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$R = Q^t \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$