

EXERCICIO 2

Sean los vectores $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (5, 6, 7, 8)$, $v_3 = (7, 10, 13, 16)$

$v_4 = (8, 12, 16, 20)$ de $\mathbb{R}^4$

a) Razone si el conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es base de $\mathbb{R}^4$

b) Determine una ec. param, una implícita y dim de

$$L = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$$

c) Calcule una base del complemento ortogonal de L ($L^\perp$)

d) Calcule el subespacio $L + L^\perp$ y razone si es suma directa.

a) $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ serán base de $\mathbb{R}^4$ si son linealmente independientes y esto ocurre si el rango de los 4 vectores es 4.

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 10 & 12 \\ 3 & 7 & 13 & 16 \\ 4 & 8 & 16 & 20 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{Por tanto no forman una base}$$

b) $L = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ Una base de L estará formada por 2 vectores lin. indep.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Base } L = \{ (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8) \}$$

$$\dim L = 2$$

Ec. paramétricas

$$\begin{cases} x = \alpha + 5\beta \\ y = 2\alpha + 6\beta \\ z = 3\alpha + 7\beta \\ t = 4\alpha + 8\beta \end{cases}$$

Ec. implícitas

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & x \\ 2 & 6 & y \\ 3 & 7 & z \\ 4 & 8 & t \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - 3F_1 \\ F_4 = F_4 - 4F_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & x \\ 0 & -4 & -2x+y \\ 0 & -8 & -3x+z \\ 0 & -12 & -4x+t \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} F_3 = F_3 - 2F_2 \\ \hline F_4 = F_4 - 3F_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & X \\ 0 & -4 & -2X+7 \\ 0 & 0 & X-2\gamma+z \\ 0 & 0 & 2X-3\gamma+t \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} X-2\gamma+z=0 \\ 2X-3\gamma+t=0 \end{array} \right.$$

$$c) B_{L^\perp} = \{ (1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1) \}$$

$$d) L + L^\perp = \langle (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), (1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1) \rangle$$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & -3 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 \quad \text{entonces } L + L^\perp = \mathbb{R}^4$$

$$\underline{L \cap L^\perp}$$

$$\text{Ec. implicadas de } L^\perp: \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & X \\ -2 & -3 & Y \\ 1 & 0 & Z \\ 0 & 1 & t \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} F_2 = F_2 + 2F_1 \\ \hline F_3 = F_3 - F_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & X \\ 0 & 1 & 2X+Y \\ 0 & -2 & -X+Z \\ 0 & 1 & t \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} F_3 = F_3 + 2F_2 \\ \hline F_4 = F_4 - F_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & X \\ 0 & 1 & 2X+Y \\ 0 & 0 & 3X+2Y+Z \\ 0 & 0 & -2X-Y+t \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} 3X+2Y+Z=0 \\ -2X-Y+t=0 \end{array} \right.$$

$$L \cap L^\perp \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3y + t = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ -2x - y + t = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

Por tanto $L \cap L^\perp = \{0\}$

y entonces L y $L^\perp$ están en suma directa ($L \oplus L^\perp$)